**Модели межотраслевого баланса**

1 Понятие МОБ

Эффективное функционирование экономики предполагает наличие баланса между отдельными отраслями. Каждая отрасль при этом выступает двояко: с одной стороны, как производитель некоторой продукции, а с другой-как потребитель продуктов, вырабатываемых другими отраслями. Алгебраическая теория анализа” Затраты-выпуск” сводится к системе линейных уравнений, в которых параметрами являются коэффициенты затрат на производство продукции.

Для дальнейшего рассмотрения модели Леонтьева сделаем два важных предположения.
Первое состоит в том, что сложившуюся технологию производства считаем неизменной. Таким образом, матрица А=(aij) постоянна.
Второй состоит в постулировании свойства линейности существующих технологий, т.е для выпуска j-й отраслью любого объема продукции Xj необходимо затратить продукцию отрасли i в количестве aij Xj, т.е материальные издержки пропорциональны объему производимой прдукции.

С помощью этой модели можно выполнить три вида плановых расчетов.
1) Задав в модели в величины валовой продукции каждой отрасли ( Xi), можно определить объемы конечной продукции каждой отрасли ( Yi):
 Y=(E-A)X.
2) Задав величины конечной продукции всех отраслей ( Yi), можно определить величины валовой продукции каждой отрасли( Xi):
 X=(E-A)-1Y
3) Задав величины валовой продукции для ряда отраслей и объемы конечной продукции для всех остальных отраслей, можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой продукции вторых.

Плановый расчет по модели Леонтьева можно проводить, если выполняется условие продуктивности.

Более простым, но только *достаточным условием продуктивности* матрицы А является ограничение на величину ее нормы т.е. на величину наибольшей из сумм элементов матрицы А в каждом столбце: *если норма матрицы А строго меньше единицы, то это матрица продуктивна.* Повторим, что данное условие является только достаточным, и матрица А может оказаться продуктивной и в случае когда ее норма больше единицы.

Матричная форма технико-экономического плана в значительной мере упрощает планирование и уменьшает его трудоемкость: она позволяет быстро разработать различные варианты технико-экономического плана.

**2 МЕЖОТРАСЛЕВОЙ БАЛАНС ПРОИЗВОДСТВА И РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОДУКЦИИ**

Межотраслевой баланс производства и распределение продукции является результатом развития балансового метода анализа и планирования народного хозяйства. Межотраслевой баланс позволяет проверить сбалансированность народнохозяйственного плана, соблюдение установленных пропорций развития различных отраслей народного хозяйства, а также межотраслевых и внутриотраслевых пропорций.

Общую схему межотраслевого баланса можно представить в виде таблицы:

**Условие сбалансированности между производством и по­требностями требует выполнения равенства
Р1 = П1 + П2 + П4 + (П3 - Р2) + (П5 – Р3),
т.е. объем производства должен быть равен алгебраической сумме следующих показателей: 1) производственно-эксплуата­ционных нужд, 2) капитального строительства, 3) рыночных фондов, 4) разности экспорта и импорта, 4) остатки на конец года и прочие нужды минус остатки на начало года и прочие источники (последние две величины в это$ сумме могут быть отрицательными, когда, например, импорт будет превышать экспорт).**

**Обозначим через Xij объем продукции i- й отрасли, использованной при производстве продукции j-ой отрасли (i, j=1,2, …, n). Это производственно-эксплуатационные нужды i-ой отрасли в продукции j-ой отрасли. Если бы первой отраслью была, например, угольная промышленность, второй-производство электроэнергии, третьей-станкостроительная промышленность, то x11 означала бы стоимость каменного угля, израсходованного при производстве всего каменного угля, x21 – стоимость электроэнергии, x31 – стоимость станков. В целом первый столбец означал бы производственные затраты при производстве каменного угля.
Точно так же x12 означает стоимость каменного угля израсходованного при производстве электроэнергии, x13 стоимость каменного угля, израсходованного при производстве станок и т.п.
Через yi обозначим объем конечной продукции i-ой отрасли, т.е все статьи распределения за исключением производственно- эксплуатационных нужд всех отраслей в ее продукции.
Все эти данные можно записать в виде таблице межотраслевого баланса.**

|  |  |
| --- | --- |
| **ресурсы** | **распределение** |
| № | источники | объем | № | потребности | объем |
| 1 | производство | P1 | 1 | Производственно-эксплуатационные нужды | П1 |
| 2 | импорт | P2 | 2 | Капитальное строительство | П2 |
| 3 | Остатки на начало года и прочие источники | P3 | 345 | ЭкспортРыночные фондыОстатки на конец года и прочие нужды | П3П4П5 |

Показатели i-ой строки таблицы выражают затраты i-ой отрасли, которая необходима всем другим отраслям для производства своей продукции. В каждом столбце таблицы межотраслевого баланса дана не только структура материальных затрат соответствующей отрасли, но и чистая продукция каждой отрасли. Она состоит из суммы оплаты труда kj и прибыли lj данной отрасли. Оплата труда включает различные виды доходов работников материального производства. Прибыль lj включает различные виды чистого дохода.

Валовую продукцию каждой отрасли можно, как видно из таблицы 2.1 представить двояко с одной стороны, это сумма материальных затрат i-ой отрасли на производство своей продукции и ее чистой продукции т.е

x 1= x11 +x21 + …+ xn1 + k1 + l1,

X2 = x12+x22+…+xn2+k2+l2,

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . (2.1)

Xj= x1j+x2j +…+ xnj+ kj+lj,

. . . .. . . . . . .. . . . . . . . . . .

Xn= x1n+x2n+…+xnn+kn+ln.

С другой стороны для любой производящей отрасли эта сумма материальных затрат потребляющих ее продукцию отраслей и конечной продукции отрасли. X1 = x11+x12+…+x1n+y1,

X2= x21+x22+…+x2n+ y2,

. . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Xi=xi1+xi2+…+xin+yi,

. . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Xn=xn1+xn2+…+xnn+yn (2.2)

Уравнение системы (2.2) называются уравнениями распределения продукции отраслей материального производства

Коэффициенты прямых материальных затрат и системы межотраслевого баланса.
Коэффициентами прямых материальных затрат aij называется отношение объема продукции iой отрасли, использованной в jой отрасли к общему объtму продукции jой потребляющей отрасли:
 aij= $\frac{xij}{xj}$ (2.4)
из 2.4 имеем
 xij=aij\*xj (2.5)
после подстановки этих выражений в систему (2.2) она принимает вид :
X1 =a11x1+a12x2+…+a1nxn+y1,
x2= a21x1+a22x2+…+a2nxn+y2,
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
Xi=ai1x1+ai2x2+….+ainxn+yi,
. . . . . . . .. . . . . . . .. . . . . .
Xn=an1x1+an2x2+…+annxn+yn.
Система уравнений(2.6) называется системой уравнений межотраслевого баланса или экономико-математической моделью межотраслевого баланса производства и распределения продукции. Система (2.6) состоит из п уравнений, а переменными (или неизвестными) могут быть или валовая продукция отраслей (х„ х2, ..., х„), или их конечная продукция (уь У2. У»). Поэтому можно сформулировать три типа задач

межотраслевого баланса:

Известны коэффициенты прямых материальных затрат aij (I,j = 1, 2, n) и объемы уi, конечного продукта всех отраслей (или спроса); найти объемы производства (валовой продукции) хi; каждой отрасли.

При заданных объемах валовой продукции (объемах производства) xi всех отраслей и известных коэффициентах прямых материальных затрат а найти объемы конечной продукции у, всех отраслей.

Известны коэффициенты прямых материальных затрат aij заданы объемы валовой продукции части отраслей и объемы конечной продукции остальных отраслей; найти объемы чистой продукции первых и валовую продукцию вторых отраслей.

Первая из сформулированных задач близка к решаемой на практике; вторая и особенно третья задачи также имеют важное значение и практическое применение.

**Сформулированные задачи межотраслевого баланса реша­ются в рамках статической модели, в которой не учитыва­ется связь объемов валовой продукции отраслей х1 х2 ..., хn, произведенной в планируемом периоде, с их значениями в предшествующих и последующих периодах, а подобные задачи можно ставить только для отдельных периодов.**

2.3 решение системы уравнений межотраслевого баланса в матричной форме
Итак, рассмотрим решение задачи межотраслевого баланса: найти решение системы уравнений(2.6) при известных коэффициентах прямых мат. затрат aij и значениях показателей производства чистой продукции yi всех отраслей.
С помощью простых алгебраических преобразований систему уравнений (2.6) представим в виде :
(1-a11)\*x1 –a12 x2 - … - a1nxn = y1,
-a21x1 + (1-a22)\*x2-… - a2nxn = y2,
. . . . . . . . . . . . . . . . . . .
-an1x1 – an2x2 - … + (1-ann)\*xn = yn (2.8)

систему уравнений (2.8) запишем в матричной форме. Это даст возможность легко получить ее решение в общем виде. Для этого введем след. Обозначения: через Х обозначим матрицу- столбец переменных (х1 х2 …. xn ), через A –матрицу коэффициентов прямых материальных затрат (aij ), через En – единичную матрицу соответствующего (n-го) порядка, через Y \_матрицу столбец свободных членов (y1,y2…yn) , т.е
 

**Матрицы X и Y имеют размеры n x 1, A и En – n x n. Тогда система уравнений (2.8) в матричной форме запишется так:
 { En – A} x X = Y (2.9)
Можно показать, что квадратная матрица { En – A} неособенная, а поэтому она имеет обратную матрицу, которую обозначим { En – A}-1 . Уравнение 2.9 умножим почленно слева на матрицу {En – A}-1 , получим:
 {En – A}-1 {En – A} X = {En – A}-1  Y
Из определения обратной матрицы следует, что произведение {En – A}-1 x {En – A}= En – единичная матрица. Но тогда En X = X, поскольку единичная матрица при умножении матриц играет такую же роль, как и единица при умножении чисел, следовательно,
 (2.10) X= {En – A}-1 Y- решение системы уравнений межотраслевого баланса в матричной форме.**

 **.4. Коэффициенты полных материальных затрат

Вернемся к решению (2.10) системы уравнений межотраслевого баланса (2.8) или (2.6). Как известно, матрицу {En – A}-1 , обратную матрице {En – A}, можно высчитать по формуле:
 {En – A}-1 = 1/{En – A} x {En – A},
Где {En – A} – определитель матрицы {En – A}, а {En – A} - матрица, присоединенная к матрице {En – A}. Элементами присоединенной матрицы являются алгебраические дополнения элементов определителя матрицы, транспонированной относительно матрицы {En – A}. Обозначая матрицу, обратную матрице {En – A}, через В, а ее элементы-через bij , т.е
 b11 b12 ... b1n
 {En – A}-1 = B = b 21 b22 … b2n  . . . . . . . . .
 bn1 bn2 ... bnn (2.12)
Приходим к следующей записи решения системы уравнений межотраслевого баланса:
 X= BY, или в развернутом виде
 x1 b11 b12 … b1n y1 x2 b21 b22 … b2n y2
 .  . . . . . . . . . . bn1 bn2 … bnn .xn yn (2.13)**

**Перемножив матрицы в правой части уравнения (2.13) и воспользовавшись определением равенства двух матриц, получим систему уравнений эквивалентную уравнению (2.13):

x1 = b11 y1 + b12 y2 + … + b1n yn ,
x2 = b21 y1 + b22 y2 + … + b2n yn ,
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
Xn = bn1 y1 + bn2 y2 + … + bnn yn  (2.14)

Система (2.14) дает выражение объемов валовой продукции производящих отраслей через объемы конечной продукции этих отраслей, коэффициентами при которых являются числа bij , определяемые в этих уравнениях через коэффициенты прямых материальных затрат aij .

Прежде всего выясним экономический смысл элементов матрицы B , определяемый равенством (2.12)
Для этого рассмотрим частный случай, когда конечная продукция сводится только к одной единице чистой продукции первой отрасли, а объемы конечной продукции остальных отраслей равны нулю, т.е y1 = 1, y2 = 0, … , yn = 0 , и найдем , сколько продукции в таком случае должна будет произвести каждая из отраслей. Подстановка этих значений y1 , y2 , yn в уравнении системы (2.14) дает
 x1 = b11
 x2 = b21
 . . . . .
 Xn = bn1 ,**

Так как все остальные слагаемые в этой системе равны нулю. Таким образом элементы первого столбца матрицы B выражают количество продукции, которая должна произвести каждая из отраслей , чтобы получить только единицу готовой продукции первой отрасли.
Из экономического смысла коэффициентов полных затрат следует , что все они неотрицательны
 bij ≥ 0
Матрица B ,определяемая равенством (2.12), называется матрицей полных затрат.
Введенные раньше коэффициенты прямых затрат aij ,характеризует непосредственно затраты i-ой отрасли на производство единицы продукции j-ой отрасли . Но кроме прямых затрат на производстве продукции j-ой отрасли осуществляется так называемые косвенные затраты . Смысл их будет ясен, если рассмотреть такой пример.
Пусть одним из видов продукции пищевой пром-ти является хлеб. Для производства хлеба необходимы мука, электроэнергия и многое другое, что непосредственно используется при выпечке хлеба.

Это прямые затраты продукции, но при производстве муки в свою очередь необходимы затраты другой продукции- зерна, электроэнергии и др. эти затраты – прямые при производстве муки и косвенные – при производстве хлеба, причем их называют *косвенными затратами первого порядка .* В свою очередь при производстве зерна необходимы семена, машины и др. это прямые затраты при производстве зерна , но косвенные при производстве муки и также косвенные при производстве хлеба( их называют косвенными затратами второго порядка). Схематически это изображено на рисунке 2.1.
приведенную схему косвенных затрат при производстве хлеба можно продолжить и дальше, причем практически она продолжается не ограничено, связи все расширяются и расширяются . В результате значения полных затрат получаются приближенными.
2. **Методы вычисления коэффициентов полных затрат.**Коэффициенты полных затрат bij определяют количество продукции i-ой отрасли необходимая для выпуска единицы конечной продукции j-ой отрасли. Поэтому, если в систем уравнений (2.8) положить y1 = 1 , a y2 = y3 = … = 0 и решить полученную систему уравнений относительно x1 , x2 , xn то это решение даст нам коэффициенты полных затрат b11 , b21 , … , bn1 , которые характеризуют материальные затраты каждой отрасли на выпуск единицы конечной продукции первой отрасли. Аналогично вычисляются остальные коэффициенты полных затрат:
необходимо положить в (2.8) равным единице y2 , а остальные равные нулю, затем y3 = 1 , а остальные равными нулю и т.д.
Сравнивая полученные коэффициенты полных затрат с коэффициентами прямых затрат которые были заданы условием (2.3), замечаем , что все коэффициенты полных затрат значительно превышают соответствующие коэффициенты прямых затрат, причем наибольшее различие отмечается между коэффициентами полных и прямых затрат собственной продукции отрасли. Все они больше единицы, так как включают ту единицу ее продукции, которая входит в конечную продукцию.
Если известны коэффициенты полных затрат и задания по готовой продукции каждой отрасли, то по формулам (2.14) можно рассчитать валовую продукцию каждой отрасли.

2.8 Итерационные методы вычисления матрицы полных затрат и приближенного решения системы линейных уравнений межотраслевого баланса.

В (2.3) было получено решение системы уравнений (2.8) межотраслевого баланса в виде (2.10). Решение системы (2.8) таким образом сводится к нахождению матрицы полных затрат
 B = {En – A}-1,
Обратной матрице {En – A}. При небольшом числе уравнений система (2.8) матрицу b можно найти непосредственно. Однако, как уже неоднократно отмечалось, на практике число уравнений системы (2.8) весьма велико и вычисление матрицы присоединенной к матрице {En – A}, очень громоздко. Так как сводится к вычислению алгебраических дополнений, которые являются определителями (n-1)- го порядка. В связи с этим разработаны методы приближенного , но в достаточной степени точного вычисления элементов матрицы полных затрат. Идею этого метода поясним при n=1. В этом случаем En и A – квадратные матрицы первого порядка, а поэтому имеет только по одному элементу, а их определители равны этим элементам. Единичная матрица первого порядка- матрица с одним элементом, равным 1; матрица A – тоже матрица с одним элементом, равным искомому числу а, причем 0≤a ≤ 1. Тогда матрица {En – A}= {1}- {a} = {1-a}, а матрицей, обратной {En – A}будет матрица
 {En – A}-1 = {1/1-a}.
Элемент этой матрицы- число 1/1-a можно рассматривать как сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, первый член которой равен 1 , а знаменатель прогрессии равен а:
 1/1-a = 1+a + a2 + … + ak + …

Такое представление законно, так как а<1. Итак, при n=1 элемент матрицы полных затрат представляется в виде сходящегося числового ряда
 {1-a}-1 = 1+а+а2 + … + ak + … ,
И этот элемент можно вычислить приближенно, но как угодно точно, взяв за его значения сумму достаточно большого числа первых членов ряда
 {1-a}-1 ≈ 1+a + a2 + … + akАналогично вычисляется приближенно элементы матрица {En –A}-1 . Можно доказать , что если матрица А удовлетворяет некоторым условиям, которые обычно выполняются в задачах межотраслевого баланса, то справедливо равенство
B= {En – A}-1 = En + A + A2 + … + Ak … , (2.16)

правая часть которого- матрица представленного в виде суммы неограниченного числа матриц. Поэтому каждый элемент ее является суммой сходящегося числового ряда, составленного как сумма соответствующих элементов матриц En , A , A2 и т.д. Чтобы вычислить приближенно элементы матрицы полных затрат , достаточно взять сумму первых k членов ряда (2.16)
Матрица A2 A3 и тд вычисляется последовательно, учитывая что Am+1 = Am x A. Отсюда и название метода ***метод последовательных приближений, или итерационный метод.***

Рассмотрим применение этого метода на примере.
Пример дана таблица межотраслевого баланса, в которой приведены показатели прямых затрат и
объемы конечной продукции трех взаимосвязанных отраслей народного хозяйства.

По этим данным рассчитать валовую продукцию каждой отрасли и межотраслевые поставки, определив матрицу полных затрат итерационным методом, ограничившись четырьмя членами разложения (2.16)
По условию принимаем , что матрица полных затрат имеет вид
 b= {En – A}-1 ≈ En  + A + A2 + A 3
Матрица А в условиях задачи имеет вид
 0,1 0,12 0,125
 A= 0,05 0,04 0,075
 0,3 0,12 0,025



Поэтому необходимо еще найти вторую и третью степень матрицы А:
 0,1 0,12 0,125 0,1 0,12 0,125
A= A x A = 0,05 0,04 0,075 x 0,05 0,04 0,075 =
 0,3 0,12 0,025 0,3 0,12 0,025

 0,0535 0,0318 0,024625

 = 0,0295 0,0166 0,011125

 0,0435 0,0438 0,047125

Далее найдем A3 как произведение матрицы A2 на А:

 0,0535 0,0318 0,024625 0,1 0,12 0,125

A3 = A2 x A = 0,0295 0,0166 0,011125 0,05 0,04 0,075 =

 0,0435 0,0438 0,047125 0,3 0,12 0,025

 = 0,01433 0,01065 0,00969

 0,00712 0,00554 0,00521

 0,02068 0,01263 0,00990

По формуле (2.16) приближенно матрица полных затрат равна

 1 0 0 0,1 0,12 0,125 0,0535 0,0318 0,024625

B≈E+A + A2 + A3 ≈ 0 1 0 + 0,05 0,04 0,075 + 0,0295 0,0166 0,011125 +

 0 0 1 0,3 0,12 0,025 0,0435 0,0438 0,047125 0,01433 0,01065 0,00969 1,1678 0,1624 0,1593
+ 0,00712 0,00554 0,00521 = 0,0866 1,0621 0,0913
 0,02068 0,01263 0,00990 0,3642 0,1764 1,0820
Пользуясь полученной матрицей полных затрат по формуле (2.13) вычислим объемы валовой продукции рассматриваемых отраслей народного хозяйства y1 = 100 y2 = 200 y3 = 300 Как произведение матрицы полных затрат на матрицу – столбец готовой продукции, что сводится к применению формул (2.14):

x1  = 1,1678 x 100 + 0,1624 x 200 + 0,1593 x 300 = 197,05
x2 = 0,0866 x 100 + 1,0621 x 200 + 0,0913 x 300 = 248, 47
x3 = 0,3642 x 100 + 0,1764 x 200 + 1,08200 x 300 = 396,3

**Можно доказать, что если максимальная сумма абсолютных величин коэффициентов по строкам системы( 2.6) меньше единицы , тоесть** *max* $( \sum\_{j=1}^{n}a1j , $ $\sum\_{j=1}^{n} a2j , . . . ,\sum\_{j=1}^{n}anj , )<1, (2.20)$

Условие (2.20) ***Является , таким образом достаточным условием сходимости итерационного процесса.***Сходимость итерационного процесса можно ускорить, если несколько видоизменить его, воспользовавшись тем, что каждая из последовательности (2.19) монотонно возрастает . Этот метод называемый **методом Зейделя** , состоит в следующем. На нулевой итерации в качестве приближенных значений объемов валовой продукции берут свободные члены уравнений системы (2.6)
 x1(0) = y1 , x2(0) = y2 , … , xn(0) = yn.Далее, на первой итерации x1(1) получают точно так же, как и ранее. Но при вычислении x2(1)  во второе уравнение системы (2.6) вместо x1 подставляем не y1 , а только что найденное значение, x1(1) (как бы опережая события), вместо x2, … xn – значения, принятые на нулевой итерации. При нахождении x3(1) вместо x1 и x2 подставляем найденные значения x1(1) и x2(1)  , а вместо остальных значений объемов валовой продукции-принятые на нулевой итерации значения и т.д. При вычислении xn(1) вместо x1 x2 xn-1 подставляем уже вычисленные в этой итерации x1(1) , x(1)2 только вместо xn- значение xn0 = yn

**X1(1)  = a11 x1(0) + a12 x2(0) + … + a1n xn(0),x2(1) = a21x1(1) + a12 x2(0) + … + a2n xn(0)
……………………………………………………………… X1(1)  = an1 x1(0) + an2 x2(0) + … + ann xn(0) В общем случае ,т.е на k-й интерации, поступают аналогично: x1(k) находят, как обычно, а именно так как записано в первом уравнении системы (2.18); при нахождении x 2(k) во второе уравнение системы (2.18) вместо x(k-1) подставляем только что найденное значение x1(k), а вместо x(k-1) , … , x n(k-1) значения полученные на (k-1) интерации; при нахождении x3k вместо x(k-1)  и x(k-1) представляем найденные на этой интерации значения x1(k), x2(k) , а вместо остальных – значения полученные на предыдущей интерации, и т.д. Таким образом применяют следующие формулы для подсчета значений x1 x2 …. Xn на k-й интерции

X1(k)  = a11 x1(k-1) + a12 x2(k-1) + … + a1n xn(k-1),x2(k) = a21x1(k) + a22 x2(k-1) + … + a2n xn(k-1)
………………………………………………………………….. X1(k)  = an1 x1(k) + an2 x2(k-1) + … + ann xn(k-1) При проведении интераций по этому методу сходимость значений x1(k), x2(k)  …. x n(k)  к своим предельным значениям происходит, как правило, быстрее, чем при простом методе интераций.**